L'ADIEU A L'HEXAGONE REGULIER

Mélétis MICHALAKIS

Georges NICOLAS-O.

<u>Prologue</u>

- 1. En 1933 dans "Die zentralen Orte in Süddeutschland" Walter CHRISTALLER formule le problème de la forme spatiale de la distribution de la marchandise centrale autour d'un lieu central de manière contradictoire. Sur le plan empirique il affirme que la forme (géographique) de la limite de la marchandise centrale est irrégulière (allemand : p. 58; anglais, dans la traduction de C.W. BASKIN (1966, p. 54) : ... "irregularly shaped like a star..."). Sur le plan théorique il pose que la forme géométrique de la limite centrale est circulaire (allemand et anglais : ring). Pour surmonter cette contradiction, en 1977 dans "Central place theory : a reinterpretation", Keith S. BEAVON propose de suivre l'ensemble des auteurs de langue anglaise en acceptant l'hypothèse ad-hoc suivante : "When we examine the range under the conditions of a uniform transportation surface (K. S. BEAVON, p. 20) we find, in looking at it spatially, that there is not a line, but rather a ring around the central place" (W. CHRISTALLER traduit par C. W. BASKIN, p. 54).
- 2. En 1984, dans le modèle géométrique de la centralité de Lausanne il est démontré et calculé que la solution géométrique du problème de la distribution de la marchandise centrale dans une couronne (ring) autour d'un lieu central proposée par W. CHRISTALLER à la figure 1 du texte allemand (p. 66) est géométriquement fausse. Il est ensuite démontré que la solution géométrique exacte du problème de la centralité posé par W. CHRISTALLER permet d'utiliser n'importe quelle figure géométrique (régulière ou irrégulière) à 3, 4, 5 ou 6 côtés pour représenter la disposition des lieux centraux autour d'un lieu central initial. Il est démontré également que les figures du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier sont des cas particuliers ou des cas limites de la solution générale et que leur probabilité d'observation empirique est pratiquement nulle. L'image pédagogique normative du réseau central hexagonal régulier devrait être abandonnée puisqu'elle est soit fausse, soit totalement improbable.
- 3. Contrairement à la solution classique, la solution géométrique de Lausanne du problème spatial de la centralité est indifférente à la nature de l'espace de la centralité. Le modèle de Lausanne rend donc inutile la formulation d'une hypothèse ad-hoc pour franchir le fossé existant entre les formes spatiales empiriques irrégulières observées et les formes spatiales géométriques régulières théoriques utilisées pour formuler le modèle de la centralité. Le modèle de Lausanne s'adapte exactement aux formes géométriques irrégulières observées dans la disposition spatiale des lieux centraux. Il n'exige aucune déformation géométrique "a priori" des réseaux de lieux centraux observés. Le modèle de la centralité de Lausanne est géographiquement plus économique parce qu'il permet d'étudier la centralité géographique sans être obligé de postuler ou de poser axiomatiquement que l'espace géographique est identique à un espace géométrique régulier (isomorphie) ou à un espace physique indifférencié (isotropie).
- 4. Le modèle géométrique de la centralité de Lausanne n'est pas trivial parce qu'il n'autorise que des associations de figures de base à 3, 4, 5 ou 6 côtés. Or si on joint par des lignes droites ne se recoupant pas des bourgs ou des villes de même importance en choisissant le tracé de ces lignes en fonction de critères purement géométriques, les figures que l'on obtient en associant les figures de base peuvent avoir plus de six côtés. Il faut donc que le chercheur sélectionne les figures de base géographiquement, historiquement, économiquement etc. valables pour obtenir au plus six côtés en les agrégeant par un sommet où se trouve un lieu central.

G. N.-O.

0. Préliminaires de Walter Christaller à l'étude géométrique de la centralité

Le texte fondamental de Walter Christaller sur la centralité, "Die zentralen Orte in Süddeutschland" (1923-33), n'est pas traduit en français. De plus, en général, les recherches de base effectuées depuis W. Christaller sur la notion de centralité sont connues des utilisateurs francophones à travers des textes en anglais, ou encore, grâce à des traductions ou des adaptations en anglais de textes en allemand.

Ainsi, lorsqu'en 1980, un groupe s'est formé à Lausanne pour réfléchir sur les résultats de recherches empiriques menées depuis 1974 sur le réseau urbain vau-dois au Moyen-Age par l'un de ses membres, trois décisions furent prises:

- (a) retourner au texte allemand de Walter Christaller afin de retrouver la définition originale des concepts fondamentaux relatifs à la centralité;
- (b) comparer l'original allemand avec la traduction anglaise de Carlisle W. Baskin publiée en 1964 : "Central Places in Southern Germany";
- (c) analyser des traductions françaises de textes anglophones sur la centralité comme ceux de Brian J.L. Berry: "Géographie des marchés" (1967), ou de Peter Haggett: "L'analyse spatiale en géographie humaine" (1973) pour essayer de voir dans quelle mesure l'on retrouvait dans les textes en français les idées initiales de Walter Christaller.

Très rapidement deux constatations s'imposèrent :

- (aa) Walter Christaller était parti d'une figure géométrique précise, le <u>triangle</u> <u>équilatéral</u>, et non pas de l'hexagone régulier. Or, nombre de successeurs germanophones, anglophones et francophones avaient "oublié" (ou dans le meilleur des cas minimisé au point de le faire oublier) l'utilisation initiale du triangle équilatéral par Walter Christaller pour commencer à raisonner sur l'hexagone, à la suite des travaux d'August Lösch: "Die räumliche Ordnung der Wirtschaft" (1940) traduits en anglais: "The economics of Location" (1953);
- (bb) le passage du triangle équilatéral initial à l'hexagone n'avait fait l'objet d'aucune démonstration mathématique dans le texte de Walter Christaller.

Le groupe de Lausanne (membres du Colloque Espace-Temps des universités de Genève, Lausanne et Neuchâtel : Marie-Jeanne BOREL, Rémy DROZ, Mélétis MICHALAKIS, Georges NICOLAS-O., Anne RADEFF) décidait donc de repartir des affirmations de Walter Christaller sur la relation entre la centralité et le triangle équilatéral après avoir examiné quel en était, toujours d'après Walter

Christaller, l'enjeu géographique.

Dans son ouvrage de 1932-33, Walter Christaller introduit quatre notions avant de parler géométriquement de la centralité :

- 0.1. le <u>"principe d'ordre de la centralité"</u> (Zentral als Ordnungsprinzip)
- 0.2. la "fonction centrale" (die zentrale Funktion)
- 0.3. le "lieu central" (das zentrale Ort)
- 0.4. la "marchandise centrale" (das zentrale Gut).
- O.1. D'après Walter Christaller, la centralité est <u>un principe</u> (die zentralistische Prinzip) qui se retrouve à la fois dans l'esprit humain, dans la société et dans la nature. La centralité est <u>un ordre</u> fondé sur les rapports qui s'établissent entre un centre et ses alentours. <u>Un centre</u> est caractérisé par "l'organisation d'une masse autour d'un noyau" (die Anordnung einer Masse um einen Kern, ein Zentrum : p. 21 de l'original allemand; the crystallization (sic) of mass around a nucleus is ... a centralistic order : p. 14 de la traduction anglaise). L'observation des lieux habités à la surface de la terre montre que, dans les villes médiévales, il existe des édifices dont la présence et l'ordonnance monumentale attestent le caractère central : l'église, l'hôtel de ville, la place du marché, etc. De nos jours, même s'il n'est plus apparent, cet ordre apparaît dans le fait que chaque <u>région</u> est associée de manière complémentaire (Ergänzungsgebiet) à un centre où se trouvent localisées un certain nombre de fonctions dites "centrales".
- 0.2. Les fonctions centrales peuvent être classées en neuf catégories :
 - (1) administratives,
 - (2) religieuses et culturelles,
 - (3) de santé publique,
 - (4) de communications de masse,
 - (5) coopératives,
 - (6) financières et commerciales,
 - (7) professionnelles,
 - (8) d'emploi,
 - (9) de transports et de communications.

A l'intérieur d'une même catégorie, les fonctions sont hiérarchisées par l'importance et l'intensité des échanges effectués dans un même lieu central.

- 0.3. Un "lieu central" est par conséquent un "organe spatial" (ein räumliches Organ) dans la genèse duquel la "distance économique" joue un rôle décisif mais non exclusif. La distance économique est en effet une combinaison entre la distance géographique (exprimée en kilomètres), le prix du transport (assurances et stockage compris) et divers avantages de "transit" qui ne sont pas tous de nature économique. Chaque lieu central dessert ainsi une population dont l'importance est en relation avec les différents types de marchandises demandées ou offertes depuis les lieux où les habitants résident de manière dispersée ou concentrée.
- 0.4. Toutes conditions de marché étant égales (même revenu et même prix du transport à l'unité), l'échange d'une marchandise ne dépend pas uniquement du nombre de consommateurs potentiels. La demande totale est également fonction du degré de concentration de la population et de la nature de la marchandise. Certains biens peuvent être qualifiés de "dispersés" dans la mesure où ils peuvent être produits directement par les habitants (traduction anglaise, note p. 51). D'autres par contre sont par nature "centraux" parce qu'ils sont très spécialisés et qu'ils ne peuvent donc pas être fabriqués par tout un chacun. Du point de vue théorique, Walter Christaller analyse longuement le cas des soins médicaux (B : Beziehungen der Statik, 2 : Die Verteilung der Bevölkerung und die zentralen Orte, p. 33-38); empiriquement il cartographie le nombre de téléphones dans les villes d'Allemagne du sud (Karte 2 : Die Verteilung der zentralen Einrichtungen in Süddeutschland). Ceci étant, pour un même bien central, il existe une répartition optimale de la population qui est à mi-chemin entre la dispersion complète dans un grand nombre de points et la concentration intégrale en un seul endroit. C'est la répartition "centrale" dans un nombre limité de lieux que Walter Christaller cherche par tâtonnements successifs. Pour ce faire, il pose le principe qu'une "marchandie centrale" a une "portée" (die Reichweite eines zentralen Gutes) qui est la "distance" (Entfernung) à laquelle parvient encore un bien (ein Gut) offert par un "lieu central" (ein zentrales Ort) à une population dispersée ou concentrée. Cette "étendue" est "absolue" (die ideale (absolute) Reichweite) quand l'endroit desservi se trouve hors de "portée" (Reichweite) de n'importe quel autre lieu central pour une marchandise considérée. Elle est "relative" (die relative Reichweite) si cette marchandise peut être livrée dans de meilleures conditions (prix, proximité) à partir d'un autre centre (texte allemand, p. 65).

Par conséquent, théoriquement le principe de la centralité explique à la fois les caractéristiques spatiales de toute marchandise (centrale ou dispersée) et la répartition de la population dans tous les lieux (centraux ou dispersés) à la surface de la terre. Empiriquement, que l'on prenne comme "entrée" la marchandise ou <u>la population</u>, il est possible d'analyser la centralité en l'abordant par le biais des relations statistiques ou spatiales entre ces deux premières variables expliquées, la variable explicative étant la centralité. Ce "biais" a été largement exploité depuis Walter Christaller sans que rien de nouveau n'ait été énoncé sur la nature des relations centralité-marchandise-population. Or, "Die zentralen Orte in Süddeutschland" montre que l'analyse des relations entre marchandises et population à l'aide d'outils numériques souffre d'arbitraire et d'ambiguïté. Dès l'abord, Walter Christaller se place dans la situation "concrète" de l'Allemagne du Sud avec une densité oscillant entre 25 et 80 habitants au kilomètre carré et une durée de calcul de consommation égale à une année. Le type de bien central de grande "portée" (Reichweite; anglais : range) est pour lui le billet de théâtre. Pour être rentable précise-t-il, un théâtre doit donner au moins 200 représentations par an à raison de 500 places par séance, soit une vente de 100'000 billets par an. Si la densité de population est de 80 au km², cela représente 400'000 habitants répartis sur 500 km² dans un cercle de 40 km de rayon. Mais il faut en plus que la population groupée au centre de ce cercle dans un rayon de 10 km, soit supérieure à 80'000 habitants (pratiquement 100'000 habitants) pour absorber annuellement le minimum nécessaire de billets. Par exemple, si la capitale de la région ne comporte que 20'000 habitants (sur les 400'000), le théâtre n'est pas rentable. Donc, non seulement le chiffre total de population doit être égal ou supérieur à un minimum mais encore la répartition spatiale des consommateurs doit être également optimale autour du centre en fonction des distances de déplacement qui varient suivant les bien consommés. D'autre part, il existerait des "portées" (Reichweiten) de cinéma différentes suivant les régions industrielles (20 à 30 km) ou agricoles (2 à 3 km), les ouvriers évaluant leur déplacement pour se rendre à ce type de spectacle moins cher que les paysans (texte allemand, p. 56). Pratiquement, au-delà de 40 km d'un théâtre situé dans un lieu central, la "limite absolue" de la marchandise : "billet de théâtre" est atteinte. Entre 40 et 10 km il existe une clientèle si la population est au moins de 300'000 habitants. A condition cependant que le lieu central regroupe, dans un rayon de 10 km, 100'000 autres habitants. Jusque-là on pouvait espérer que des recherches précises sur les différentes "portées" des marchandises

remédieraient au caractère un peu arbitraire des raisonnements "numériques" de l'inventeur de la théorie de la centralité.

Mais à partir du point 8 (Das System der zentralen Orte) du paragraphe B (Beziehungen der Statik) deux glissements importants se produisent dans le texte de Walter Christaller. Tout d'abord l'auteur passe de la centralité considérée comme un "principe d'ordre" appliqué dans une situation "concrète" à une démonstration géométrisée de la centralité qui se veut spatialement "explicative". La référence de l'Allemagne reste bien entendu sous-jacente et renvoie pratiquement à la deuxième partie (II. Verbindender Teil): The connecting part: application of the theory of location to the actual geography of settlements). En particulier, les quantifications apparemment aussi arbitraires qu'exemplaires deviennent beaucoup plus "signifiantes" par rapport à l'objectif poursuivi par Walter Christaller: "démontrer" que le réseau urbain d'Allemagne du sud est de type "centralisé".

Ainsi, brusquement, sans justification ni renvoi, au point B 8, l'auteur se met à raisonner géométriquement sur une marchandise dont la "portée" (Reichweite) est de 20 kilomètres pour généraliser ensuite à une série de distances plus grandes et plus petites. Or, l'explication de ce choix se trouve dans la relation à double signification qu'il est possible d'établir entre le chiffre de 100'000 habitants et les fonctions urbaines des lieux centraux d'une part et d'autre part la distance de 21 kilomètres (exactement 20,7 kilomètres arrondis à 21). Concentrés dans un lieu central unique les 100'000 habitants fournissent l'effectif de population nécessaire à l'existence d'une ville considérée à l'époque en Allemagne comme une "capitale provinciale" (Provinzialhauptorte; provincial capital). On y observe, d'après Walter Christaller, toutes les caractéristiques urbaines : routes pour automobiles, abattoir, centrale gazière, stade, théâtre, siège de gouvernement provincial, écoles supérieures de commerce, magasins spécialisés, banques, bourses, sièges régionaux des postes et des chemins de fer (texte allemand p. 154; anglais p. 157). La population répartie autour de ce lieu central est alors de 1'000'000 d'habitants dans un rayon de 60 kilomètres (tableaux, en allemand, p. 155; en anglais, p. 158). Par contre, si les 100'000 habitants ne sont pas concentrés dans un lieu central unique mais répartis dans une aire autour d'un lieu central, le procédé de calcul inventé par Walter Christaller permet de les distribuer dans un rayon de 21 kilomètres autour d'un centre ne comptant que 10'000 habitants (mêmes tableaux).

L'on rencontre ainsi un de ces chiffres que Walther Christaller s'efforce de justifier théoriquement mais qui n'ont de signification que dans la manière dont il conçoit l'Allemagne de l'entre deux guerres, sans trop se soucier des contradictions entre ses conceptions théoriques et ses représentations géographiques. Ainsi, sur la carte 4 (Das System der zentralen Orte in Süddeutschland) une figure géométrique (théorique) à 6 côtés est présentée comme le "modèle" du système urbain de l'Allemagne du Sud avec 6 places centrales disposées respectivement au centre (Stuttgart) et aux sommets (Frankfurt, Nürnberg, München, Zürich (sic), Strassburg (sic)) d'une figure géométrique (empirique)... à 5 côtés! Le nombre 6 est à nouveau à "double signification": d'une part, une figure "théorique" à 6 côtés mais à 7 lieux centraux, l'hexagone; d'autre part, une figure "empirique" à 6 centres mais à 5 côtés, le pentagone. Cependant, si l'on se reporte au texte (III. Regionaler Teil: Anzahl, Verteilung und Grösse der zentralen Orte in Süddeutschland), l'on apprend trois choses dans l'édition allemande (mais pas dans l'édition anglaise!):

- (a) que le système cartographié n'est pas "normal" (sic) parce qu'il n'a que 5 sommets au lieu de 6 (texte allemand p. 201),
- (b) que par conséquent au moins un des 6 centres cartographiés, München, n'est pas à mettre sur le même rang que les 5 autres centres (Nürnberg, Frankfurt, Zürich, Strassburg) en dépit du fait que les villes allemandes mesurées ont le même "indice de centralité" (Formel der rohen Zentralität),
- (c) que München se trouve en réalité au centre d'un système hexagonal de rang supérieur avec, au sommet, Nürnberg, Prag, Wien, Venedig (Venise), Zürich et Stuttgart (texte allemand, p. 166). A aucun moment cependant Walter Christaller ne s'interroge sur la validité géographique théorique d'un schéma à 5 côtés plutôt qu'à 6.

Pour étudier la centralité, il est donc légitime de chercher une voie plus rigoureuse que celle de l'utilisation exclusive des nombres, en raison du caractère à la fois ambigu et quasiment magique que Walter Christaller a donné dès l'origine aux chiffres, fussent-ils obtenus à l'aide de statistiques. C'est d'ailleurs la voie dans laquelle s'était engagé August Lösch dès les années 40 et dans laquelle il a été suivi par des auteurs anglophones comme Michel Dacey en 1965. D'autre part, si l'on s'en tient aux résultats d'analyse spatiale cartographiés par Walter Christaller lui-même, la figure géométrique à examiner en premier est, comme le texte le confirme, le triangle (équilatéral ou irrégulier) et non

pas l'hexagone. Les cartes publiées après la deuxième guerre mondiale par Walter Christaller sur la centralité en Europe (et non plus seulement en Allemagne), confirment d'ailleurs que le triangle est bien la figure opératoire pour l'étude de la centralité.

Enfin un deuxième glissement important qui se produit au point B 8 du texte allemand est en grande partie occulté par la traduction anglaise. Dans les 50 premières pages, Walter Christaller étudie la centralité comme "un ordre fondé sur les rapports qui s'établissent entre un centre et ses alentours", aussi bien dans l'optique d'une "demande" de la périphérie orientée vers le centre que d'une "offre" du centre à la périphérie. Or, au point B 7, la "marchandise" devient "centrale" et au point B 8, il n'est plus question que d'une analyse centre > périphérie. Mais alors que le texte allemand ne laisse planer aucune ambiguïté, puisque la "marchandise centrale" (das zentrale Gut) est "offerte" (anbieten), dans la traduction anglaise la "marchandise centrale" (the central good) est "achetée" ou "acquise" (to purchase) (texte allemand, p. 54; anglais p. 49). La suite du texte allemand accentue encore cette première divergence puisque Walter Christaller parle de marchandises "offertes" (anbieten), "livrées" ou "distribuées" (beliefern) depuis le centre alors que la traduction anglaise parle tantôt de marchandises "offertes" (to offer) ou "acquises" (to purchase) au centre (The central good ... offered ... at ... central places : texte anglais, p. 56).

Il est donc également légitime dans l'examen de la "démonstration" géométrique de Walter Christaller, de s'en tenir strictement à une analyse : $\underline{\text{centre}} \rightarrow \underline{\text{périphérie}}$.

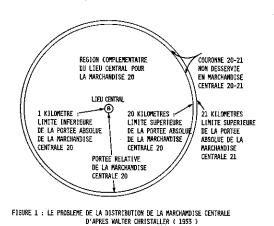
1. La géométrisation de la centralité d'après Walter Christaller

1.1. Walter Christaller commence sa "démonstration" géométrique en généralisant la notion de "distance absolue" (point 0.4.). Pour lui, en effet, tout lieu hors de la "portée" (Reichweite) d'une marchandise centrale (abréviation : MC) se trouve au-delà de la <u>limite supérieure</u> de cette MC. Mais réciproquement, la quantité minimale de la même MC qui doit être vendue sur place (pour être rentable) au <u>lieu central (abréviation : LC)</u> de distribution, détermine la <u>limite inférieure</u> de la portée de cette MC. C'est "le plus petit lieu" où la population tend à s'agglomérer. L'on en déduit que la <u>portée relative</u> d'une MC est entre les <u>limites absolues (inférieures et supérieures)</u> de la MC. Car par définition, il doit être possible d'étudier si la même MC peut être distribuée à meilleur

compte par d'autres LC dans l'aire de la "région complémentaire" inclue dans la "limite relative" (point 0.4 et figure 1). Au-delà de la limite supérieure, tous les autres LC dispensateurs de la même MC que le LC initial, peuvent distribuer cette MC de manière rentable. Les conditions posées par Walter Christaller pour résoudre le problème géométrique de la distribution des MC, sont alors les suivantes:

- (1) toute MC doit être distribuée (offerte) depuis le LC correspondant,
- (2) une MC est distribuée (offerte) dans une couronne localisée autour du LC correspondant, entre les limites inférieure et supérieure de la "portée" de la dite MC.

En d'autres termes, une MC_k de k kilomètres de "portée" doit être distribuée par les seuls LC_k , entre k kilomètres de limite supérieure et 1 kilomètre de limite inférieure. En effet, raisonne Walter Christaller, soit une MC distribuée depuis un LC appelé B. Si la MC est distribuée dans un rayon de 21 km autour de B, elle est par définition, la marchandise centrale 21 (MC_{21}). Soit maintenant, la MC_{20} distribuée depuis B : dans une couronne située entre 21 et 20 kilomètres autour de B, la MC_{20} n'est pas distribuée parce que sa limite supérieure est de 20 kilomètres. Mais alors, comment distribuer la MC_{20} dans la couronne 21-20 (figure 1) ?



1.2. <u>Si la "région complémentaire" de B est "isolée"</u>, il faut, affirme Walter Christaller sans le démontrer, pour desservir la couronne 21-20 avec des MC₂₀, créer au moins trois lieux centraux B 1, B 2, B 3, équidistants entre eux.

Ces trois nouveaux LC (de type $LCB_k = 20$) peuvent être situés n'importe où dans la région complémentaire autour de B, sauf dans un rayon de 1 kilomètre autour de B qui est la "limite inférieure" de la marchandise 20.

La figure 1 (p. 66 de l'édition allemande) montre alors que ces nouveaux LC de type B₂₀ sont mis par Walter Christaller à 21 kilomètres autour du lieu central B initial. Choix qui ne laisse pas d'étonner, lorsqu'on se réfère au concept de "portée relative" de la marchandise. Car s'il est évident que les régions complémentaires situées au-delà de 20 kilomètres sont desservies sans concurrence par d'autres LCB₂₀, pourquoi limiter l'installation de ces nouveaux LCB₂₀ à la seule circonférence de rayon 21 alors que juste avant, Walter Christaller affirme qu'ils peuvent être installés <u>n'importe où</u> en dehors du rayon de 1 km autour du LCB_{21-20} initial ? En première approximation l'explication de ce choix pourrait être la suivante. Si un nouveau LCB_{20} est localisé à 20 kilomètres ou moins du LCB₂₁₋₂₀ initial, la circonférence déterminée par la limite supérieure de la ${\rm MC}_{20}$ distribuée par ce nouveau ${\rm LCB}_{20}$ incluera le cercle de la limite inférieure de la MC_{20} autour du $\mathrm{LC}_{21\text{--}20}$ initial. Il y aura donc concurrence entre MC de même portée à l'intérieur des LC définis par la limite inférieure des MC correspondantes. Or, rien "a priori" ne s'oppose à cette concurrence puisque, dans la couronne de "portée relative" située autour de chaque LC, Walter Christaller admet cette concurrence. Géométriquement, l'affirmation de Walter Christaller est fausse : trois LCB₂₀ équidistants entre eux et situés dans la couronne 21-20 autour du LCB_{21-20} initial, ne sont pas suffisants pour desservir toute la couronne 21-20 d'une "région isolée" (figures 2 et 3).

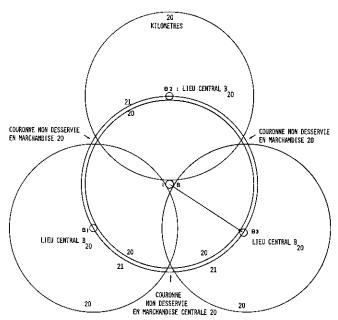


FIGURE 2: HYPOTHESE: REGION COMPLEMENTAIRE ISOLEE

LES LCB₀: B₁B₂B₃, LOCALISES A 21 KILOMETRES DU LCB₂₁₋₂₀ INITIAL PAR W.CHRISTALLER

NE DESSERVENT PAS TOUTE LA COURONNE 20-21

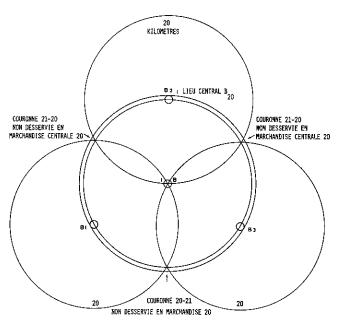
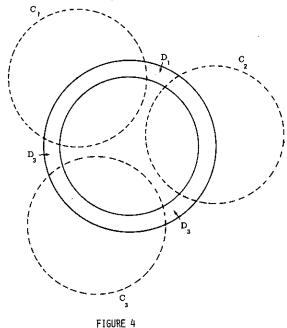


FIGURE 3 : HYPOTHESE : REGION COMPLEMENTAIRE ISOLEE LES LCB $_2$: B_1 - B_2 -Localises a 20 xilometres du LCB $_{21-20}$ initial par W.Christaller NE DESSERVENT PAS TOUTE LA COURONNE 20-21 ET NE RESPECTENT PAS LA"LIMITE IMPERIEURE" DE LA MC $_{20}$

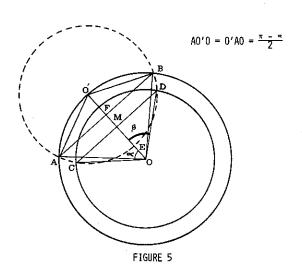
1.2.1. Premier cas : les LCB $_{20}$ sont situés sur la circonférence de 21 km de

rayon autour du LCB initial. Considérons deux cercles concentriques de rayon R et R' $(R' \le R)$ et trois cercles de rayon R', équidistants, centrés sur la circonférence du cercle de rayon R. Comme on le voit sur la figure 4, les trois cercles C_1 , C_2 , C_3 ne recouvrent pas totalement la couronne située entre les deux cercles concentriques.



Quelle est, en fonction des rayons R et R', l'aire des domaines non recouverts (figure 4) ?

Calculons dans un premier temps l'aire du domaine couvert de la couronne que nous soustraierons par la suite de la quantité Π (R² - R'²) qui représente l'aire totale de la couronne : le reste est précisément l'aire des trois domaines (D₁, D₂, D₃).



(I)

Soit A l'aire du domaine concerné sur la figure 5.

 A_1 = aire du segment circulaire A 0' B

A₂ = aire du segment circulaire A C E D B

 A_3 = aire du segment circulaire C E D = C F D

avec α et β exprimés en radians:

$$A_c = A_1 + A_2 - 2 A_3$$

 $A_1 = \frac{1}{2} O A^2 \{ 2 \alpha - \sin 2 \alpha \} = \frac{1}{2} R^2 \{ 2 \alpha - \sin 2 \beta \}$

$$A_{2} = \frac{1}{2} 0' A^{2} \{ (\Pi - \alpha) - \sin (\Pi - \alpha) \} = \frac{1}{2} R'^{2} \{ (\Pi - \alpha) - \sin \alpha \}$$
 (II)

$$A_{3} = \frac{1}{2} O D^{2} \{ 2\beta - \sin 2\beta \} = \frac{1}{2} R^{2} \{ 2\beta - \sin 2\beta \}$$
 (III)

D'où l'on déduit :

$$A_{c} = \frac{1}{2} R^{2} \left\{ 2 \alpha - \sin 2 \alpha \right\} + \frac{1}{2} R^{2} \left\{ (\Pi - \alpha) - \sin \alpha \right\} - R^{2} \left\{ 2 \beta - \sin 2 \beta \right\}$$

et si
$$\frac{R^2}{R^{1/2}} = r^2$$
 alors

$$A_{c} = \frac{1}{2} R^{2} \left\{ r^{2} \left(2 \alpha - \sin 2 \alpha \right) + \left((\Pi - \alpha) - \sin \alpha \right) - 2 \left(2 \beta - \sin 2 \beta \right) \right\}$$
 (IV)

L'on calcule les angles par voie trigonométrique :

$$\sin \alpha = \frac{1}{r^2} \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}$$

Dans le premier cas, dans le raisonnement de Walter Christaller,

$$R = 21 \text{ km}, R^r = 20 \text{ km et } r = \frac{21}{20}$$
.

Comme l'aire totale de la couronne est :

$$\Pi R^2 - \Pi R^2 = \Pi R^2 (r^2 - 1) = \Delta = 128,805 \text{ km}^2,$$

l'on en déduit l'aire totale des "trous", puisque $D_1 + D_2 + D_3 = 3 D_1$,

car
$$D_1 = D_2 = D_3$$
.

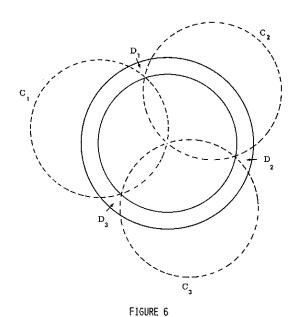
$$3 D_1 = II R'^2 (r^2 - 1) - 3 A_c$$

= $\Delta - 3 A_c$
= 128,805 - 123, 653 $\stackrel{\sim}{=}$ 5,152 km²

soit encore :
$$\frac{3 \text{ D}}{\Delta} = \frac{5,152}{128,805} = 0,03999 = 4 \%$$

Ainsi, dans le premier cas, le 4 % de la couronne 21-20 définie entre les cercles de rayon R et R' n'est pas couvert (n'est pas desservi en MC_{20}).

1.2.2. Deuxième cas : les LCB_{20} sont situés sur la circonférence de 20 km de rayon autour du LCB_{21-20} initial. Admettons maintenant que les trois cercles de rayon R'ne sont pas centrés sur la circonférence extérieure de rayon R mais sur la circonférence intérieure de rayon R'.

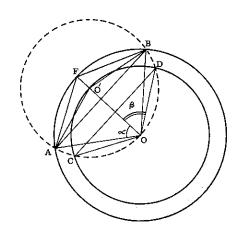


soit A l'aire du domaine concerné et

A₁ l'aire du segment circulaire A F B

A₂ l'aire du segment circulaire A C O D B

 A_3 l'aire du segment circulaire C O D = C O' D



 $AFO = \frac{\pi - c}{2}$ FIGURE 7 $AOO = \pi - 2c$

A nouveau : $A_c = A_1 + A_2 - 2 A_3$

$$A_{1} = \frac{1}{2} 0 A^{2} \{ 2 \alpha - \sin 2 \alpha \}$$

$$= \frac{1}{2} R^{2} \{ 2 \alpha - \sin 2 \alpha \}$$
 (I)

$$A_{2} = \frac{1}{2} \text{ O' } A^{2} \left\{ (2 \Pi - 4 \alpha) - \sin (2 \Pi - 4 \alpha) \right\} = \frac{1}{2} R^{2} \left\{ 2 \Pi - 4 \alpha + \sin 4 \alpha \right\}$$
 (II)

$$A_3 = \frac{1}{2} O C^2 \{ 2 \beta - \sin 2 \beta \}$$
 = $\frac{1}{2} R^2 \{ 2 \beta - \sin 2 \beta \}$ (III)

or
$$\beta = \frac{\Pi}{3}$$
 entraı̂ne 2 $\beta = \frac{2\Pi}{3}$ et sin 2 $\beta = \sin \frac{2\Pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$A_{c} = \frac{1}{2} R^{2} \left\{ 2 \alpha - \sin 2 \alpha \right\} + \frac{1}{2} R^{2} \left\{ 2 \Pi - 4 \alpha + \sin 4 \alpha \right\} - R^{2} \left\{ \frac{2 \Pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$
 (IV)

et si
$$\frac{R^2}{R^2} = r^2$$
 alors

$$A_{c} = \frac{1}{2} R^{2} \left\{ r^{2} \left(2 \alpha - \sin 2 \alpha \right) + \left(2 \Pi - 4 \alpha + \sin 4 \alpha \right) - 2 \left(\frac{2 \Pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

L'angle α peut être calculé à l'aide du triangle 0'0 A :

$$R^{2} = R^{2} + R^{2} - 2 RR' \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{R^2}{2 RR!} = \frac{R}{2 R!} = \frac{r}{2}$$

D'où l'on déduit que :

$$\sin \alpha = 1 - \frac{r^2}{4}$$

Dans le second cas, dans le raisonnement de Walter Christaller :

AC
$$\stackrel{\sim}{=}$$
 42,3351
3 D₁ = Δ - 3 AC $\stackrel{\sim}{=}$ 1,8km²
 $\frac{3 D}{\Delta}$ = 0,0139 $\stackrel{\sim}{=}$ 1,4 %

Ainsi, dans le deuxième cas, le 1,4 % de la couronne 21-20 définie entre les cercles de rayon R et R' n'est pas couvert (n'est pas desservi en MC_{20}).

1.3. Si la "région complémentaire" de B n'est pas isolée, il faut, affirme à nouveau Walter Christaller sans le démontrer, pour desservir la couronne 21-20 avec des MC_{20} disposer d'au moins six autres LC autour du LC initial. Les affirmations successives de Walter Christaller sont alors les suivantes.

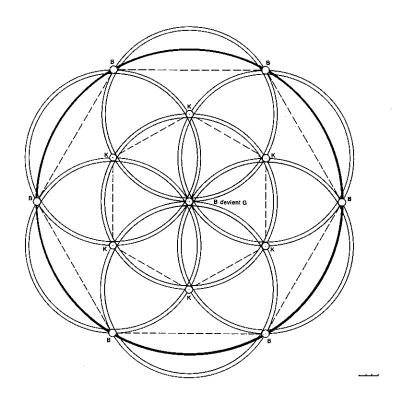
Tout d'abord il faut installer les nouveaux LCB_{20} à 36 kilomètres autour du LCB_{21-20} initial. Il est alors possible de construire des triangles équilatéraux dont les centres K sont à 21 km du LCB_{20-21} initial et dont les trois sommets sont respectivement à 0 km et à 36 km du LCB_{20-21} initial (figure 8). En effet, dans un triangle équilatéral, si on pose

$$r = le \ côté \ et \ h = la \ hauteur : h = r \frac{\sqrt{3}}{2}$$
; or si

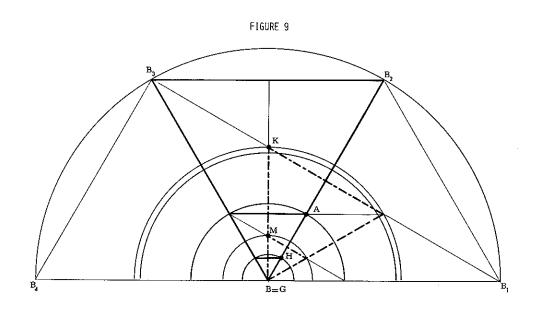
$$r = BB_1 = 36 \text{ km}$$
, alors $BK = BB_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 20,78 = 21 \text{ km}$.

Walter Christaller calcule ensuite une série de triangles équilatéraux dont le centre de gravité du premier devient le sommet du suivant (figure 9). L'on remarque ensuite que :

- (a) <u>si</u> les LCB₂₀ de la "région isolée" sont transformés en LCK de la "région non isolée",
- (b) \underline{si} l'on place trois LCK aux emplacements B de la "région isolée" autour du LC $_{21-20}$ initial,
- (c) \underline{si} l'on met trois autres LCK dans les "trous" non desservis en MC $_{20}$ de la couronne 21-20 autour du B $_{21-20}$ initial, alors toute la couronne 21-20 est desservie par six LCK distribuant des MC $_{20}$.



FIGHRE 8 : HYPOTHESE : REGION COMPLEMENTAIRE NON ISOLEE : CONSTRUCTION DE L'HEXAGONE REGULIER ET HIERARCHISATION DU RESEAU CENTRALISE , D'APRES MALTER CHRISTALLER (1933)



Walter Christaller atteint ainsi un nouveau résultat : il peut transformer le LCB₂₁₋₂₀ initial en un LCG distribuant des MC₃₆, MC₂₁ et MC₂₀. Par contre, les LCK et les LCB ne distribuent que des MC₂₀ et MC₂₁. Le résultat se hiérarchise au fur et à mesure qu'il est construit à l'aide des variations de "portées" des MC. Enfin, si l'on joint respectivement les B et les K entre eux, l'on obtient les fameux hexagones réguliers qui ont fait le tour du monde grâce à l'iconographie des ouvrages anglo-saxons d'analyse spatiale. Cependant, cette image archétypique de la centralité est obtenue au prix de deux contraintes.

1.4. Contraintes liées à la représentation hexagonale régulière

1.4.1. La première est que le système de LC construit sur le modèle géométrique hexagonal ne couvre pas entièrement toutes les régions complémentaires. Par exemple, sur la figure 8, la couronne 21-20 des centres K n'est pas complètement couverte parce qu'il manque un LC_B à chaque sommet B de l'hexagone de centre B (devenu G). Il faut donc rajouter constamment de nouveaux LC_B pour desservir les parties extérieures des couronnes. Cette solution ne peut être réalisée que si l'espace terrestre tout entier est recouvert de LC disposés sur un réseau hexagonal régulier de dimension constante. Prétention exhorbitante qui heurte l'observation élémentaire comme le prouvent les nombreux travaux empiriques menés autour du monde. Ceux-ci montrent en effet que la figure de l'hexagone régulier n'est pas vérifiée dans tous les pays et que les dimensions des figures observées (losanges, pentagones, hexagones irréguliers, etc.) varient d'un pays à un autre. Enfin, loin de pouvoir être construit sur une "plaine de transport" de dimension infinie, le système hexagonal de LC de Walter Christaller doit être construit sur un espace fini, sous peine de rester inachevé.

1.4.2. La deuxième contrainte est que le système fonctionne dans un <u>régime combiné de concurrence et d'économie</u>. Nous verrons au point 2 comment l'on arrive à cette proposition par la généralisation géométrique de l'hypothèse de Walter Christaller. Pour l'instant, l'observation immédiate montre que la création d'un magasin dans une ville ou une banlieue, n'exclut pas l'installation d'un magasin identique. Bien au contraire, la concurrence attire la concurrence avec pour seule limite, la faillite. Si au contraire, l'on cherche la disposition des LC la plus économique, les recherches des auteurs anglo-saxons ont prouvé que la disposition en hexagone n'est pas la seule possible.

2. Solution géométrique au problème de la centralité posé par Walter Christaller

Si, à la suite de Walter Christaller, l'on admet qu'il existe une relation entre la "portée inférieure" et la "portée supérieure" d'une MC, l'on peut maintenant poser le problème de la centralité dans les termes suivants. Soit, dans l'exemple de Walter Christaller, une suite de MC de portée décroissante : 20 (portée maximale), 19, 18, ... 1 kilomètre (portée minimale), l'on peut écrire :

$$MC_k - MC_{k-1} = MC_{k-1} - MC_{k-2} = ... = MC_2 - MC_1 = 1.$$

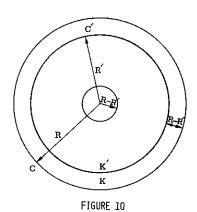
Supposons maintenant que la différence minimale de "portée" de la MC soit de p kilomètres.

L'on peut écrire la suite :

$$MC_k - MC_{k-p} = MC_{k-1} - MC_{k-p-1} = \dots = MC_{p+1} - MC_1 = p,$$

avec k = 1, 2, 3, ... n et p = 1, 2, ..., n - 1.

Le problème de la distribution de la MC posé par Walter Christaller peut alors être généralisé géométriquement. Soit deux cercles concentriques C et C' de rayons R et R' (R > R') et soit K la "couronne" définie entre les deux circonférences. Comment couvrir la couronne K avec le minimum de cercles C ?



Tout d'abord, nous avons vu au point 1.2. qu'il n'existe pas de solution si l'on situe 3 centres des cercles C dans la couronne K. Il faut par conséquent que les conditions suivantes soient respectées, si l'on veut résoudre le problème dans les termes énoncés par Walter Christaller (point 1.1.).

CONDITION I

 \forall i, C a son centre à l'intérieur de la couronne K' située entre les circonférences de rayon R' et R - R',

CONDITION II

 $\forall i, r_i$ (rayon de C_i) doit être au plus égal à R' $(r_i \leq R')$.

Quelles sont alors les conditions auxquelles doivent satisfaire les rayons R et R' ?

De la condition I l'on déduit une nouvelle condition sur les rayons R et R'. En effet :

$$R' < R \iff \frac{R'}{R} < 1 \text{ (III)}_{1}.$$

D'autre part, comme les cercles C doivent avoir leurs centres à l'intérieur de la couronne K', il faut que cette dernière existe; autrement dit, que la largeur de K' soit supérieure ou égale à zéro.

Larg (K') = R' - (R - R') = 2 R' - R
$$\geq 0 \Rightarrow \frac{R'}{R} \geq \frac{1}{2}$$
 (III)

et comme $(III)_1$, $(III)_2$ doivent être satisfaites simultanément :

CONDITION III

Larg (K')
$$\geq 0 \leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{R'}{R} < 1$$

Tout d'abord nous allons démontrer qu'il est impossible de couvrir la couronne K avec un, ou même deux cercles. Par la suite nous montrerons que sous certaines conditions il est possible de couvrir K avec trois cercles.

2.1. Pas de solution avec un seul cercle. Sur la figure 10 il est clair que le cercle centré en 0 et de rayon R couvre entièrement la couronne K. Mais ce cercle doit être exclu pour deux raisons : d'abord parce qu'il est centré dans le domaine exclu, ensuite parce que son rayon est égal à R donc supérieur à R'. Montrons maintenant que n'importe quel cercle dont le centre est dans K' et couvrant K, a un rayon supérieur à R.

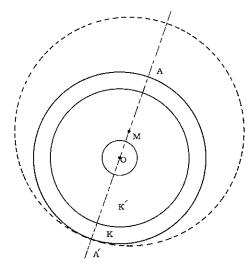


FIGURE 11

Soit M un point de la couronne K'. Joignons M à O et prolongeons jusqu'à l'intersection avec le cercle de rayon R. A est le point le plus éloigné de M. Si l'on veut construire un cercle en M couvrant entièrement la couronne K il faut que ce cercle ait un rayon supérieur ou égal à MA', donc supérieur à R'. Ce cercle est situé à l'intérieur de K' (condition I) mais il ne satisfait pas à la condition II. Quand M se rapproche du centre, la distance MA' diminue et M se rapproche de la circonférence de rayon R - R' qui est la limite inférieure de la couronne K'. Le rayon du cercle cherché

tend alors vers sa limite inférieure qui est :

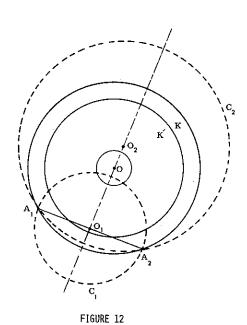
$$R + R - R' = 2 R - R' < 2 R$$

On ne peut donc pas tracer un cercle de rayon \leq R', centré à l'intérieur de K' et couvrant entièrement la couronne K.

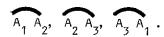
2.2. Pas de solution avec deux cercles. Divisons la couronne K en deux parties à l'aide d'une corde A A 2. Compte tenu de ce qui a été dit précédemment les centres de deux cercles doivent être situés sur la médiatrice de la corde A A 2.

- a) Si A_1 A_2 \leq 2 R' on peut construire un cercle C_1 de rayon c_1 \leq R' couvrant la partie la plus petite de la couronne et vérifiant les conditions (I) et (II). Mais par contre le cercle C_2 qui couvre la partie la plus grande de la couronne ne peut avoir qu'un rayon c_2 \geq R.
- b) Si R' $< A_1 A_2 \le 2$ R le problème est insoluble puisque tous les centres de cercles C_i seront situés dans K.

Ainsi dans les deux cas le recouvrement de la couronne avec deux cercles vérifiant les conditions (I), (II) est impossible.



2.3. Les solutions avec trois cercles. Divisons la couronne K en trois parties à l'aide des rayons 0 A_1 , 0 A_2 , 0 A_3 . Ces trois rayons définissent sur la circonférence du cercle C les trois arcs



2.3.1. Au moins l'un de ces trois arcs est supérieur ou égal à Π et de nouveau notre problème n'a pas de solution (figures 13 et 14).

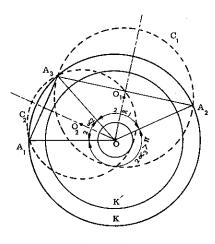


FIGURE 13

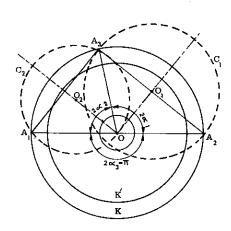


FIGURE 14

Dans les deux cas le cercle C_3 , couvrant la partie la plus grande de la couronne K serait de rayon, soit R, s'il était centré en O, soit supérieur à R s'il était centré quelque part dans K'.

2.3.2. Chacun des trois arcs $\overrightarrow{A_1}$ $\overrightarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_2}$ $\overrightarrow{A_3}$, $\overrightarrow{A_3}$ $\overrightarrow{A_1}$ est inférieur à . Autrement dit

$$o < 2 \alpha_1 < II$$

$$\leftrightarrow$$

$$0 < \alpha_1 < \Pi_{/2}$$

o < 2
$$\alpha_2$$
 < Π

$$\leftrightarrow$$

$$0 < \alpha_2 < \Pi_{/2}$$

o < 2
$$\alpha_3$$
 < Π

$$\leftrightarrow$$

$$0 < \alpha_3 < \Pi_{/2}$$

avec

$$2 \alpha_1 + 2 \alpha_2 + 2 \alpha_3 = 2 \Pi$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \Pi$$

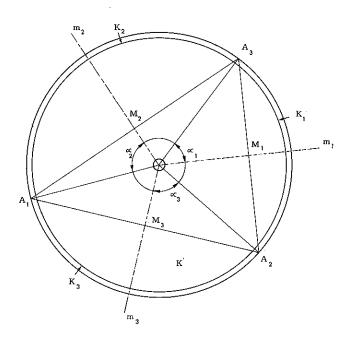
et
$$\frac{1}{2} \leq \frac{R'}{R} < 1$$

et
$$\frac{1}{2} \leq \frac{R'}{R} < 1$$

(A)

(A)'

Il est clair que (A) est équivalent à (A)' : résolvons alors le problème posé au début du point 2 (figure 10).



K=K10 K20 K3

FIGURE 15

Le cercle C_1 doit couvrir la partie K_1 de la couronne K_1 . Il a son centre sur la médiatrice du segment A_2 A_3 qui est en même temps la médiatrice du segment de l'arc A_2 A_3 et à l'intérieur de K'_1 . Soit C_1 le rayon de C_1 . D'une part C_1 ne doit pas dépasser C_1 et d'autre part il doit être au moins égal à la moitié de la corde C_1 . Ceci s'exprime mathématiquement de la façon suivante :

$$\frac{\overline{A_3 A_2}}{2} \le r_1 \le R' \qquad \text{or} \qquad \frac{\overline{A_3 A_2}}{2} = R \sin \alpha_1$$

d'où R $\sin \alpha_1 \leq r_1 \leq R'$

De la même manière, r_2 et r_3 rayons de cercles C_2 et C_3 couvrent respectivement les parties K_2 et K_3 de la couronne K_4

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{2} \leq r_2 \leq R' \qquad \leftrightarrow \qquad R \sin \alpha_2 \leq r_2 \leq R'$$

$$\frac{\overline{A_1 A_2}}{2} \leq r_3 \leq R' \qquad \leftrightarrow \qquad R \sin \alpha_3 \leq r_3 \leq R'$$

Ainsi, pour que notre problème ait une solution il faut que les relations suivantes soient simultanément satisfaites :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{R'}{R} < 1$$

$$0 < \alpha_{1} < \Pi/2$$

$$0 < \alpha_{2} < \Pi/2$$

$$0 < \alpha_{3} < \Pi/2$$

$$0 < \alpha_{4} < \alpha_{5} < \alpha_{7} < \alpha$$

Tableau 1
Le système (1) peut être mis sous la forme plus condensée (2).

$$\frac{1}{2} \leq \frac{R'}{R} < 1$$

$$0 < \alpha_{i} < \frac{\Pi}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i} = \Pi$$

$$Système (2)$$

Tableau 2

Pour que les inéquations R sin $\alpha_i \leq r_i \leq R^r$ aient un sens il faut que :

$$R \ sin \ \alpha_{i} \ \ \stackrel{<}{\leq} \ \ R' \ ou \ ce \ qui \ est \ équivalent : sin \ \alpha_{i} \ \stackrel{<}{\leq} \ \ \frac{R'}{R}$$

Or comme $\frac{1}{2} \leq \frac{R'}{R} < 1$ il existe toujours un angle θ (que nous choisissons pour simplifier dans le premier cadran), dont le sinus vaut précisément $\frac{R'}{R}$.

Posons:
$$\frac{R'}{R} = \sin \theta$$
 ainsi,
$$\frac{1}{2} \leq \frac{R'}{R} < 1 \iff \frac{1}{2} \leq \sin \theta < 1 \iff \frac{\Pi}{6} \leq \theta < \frac{\Pi}{2}$$
 et,
$$\sin \alpha_i \leq \frac{R'}{R} \iff \sin \alpha_i \leq \sin \theta \iff \begin{cases} \sin \theta < \alpha_i \leq \theta \\ \sin \theta < \alpha_i \leq \alpha_i \leq \Pi \end{cases}$$

Montrons alors que $\overline{\Pi}$ – θ $\stackrel{<}{=}$ α_i $\stackrel{<}{=}$ $\overline{\Pi}$ doit être exclu-

En effet:

puisque
$$\frac{\Pi}{6} \leq \theta < \frac{\Pi}{2} \rightarrow \Pi - \theta > \Pi - \frac{\Pi}{2} = \frac{\Pi}{2}$$

ainsi,
$$\frac{\Pi}{2} < \Pi - \theta \le \alpha_{i} < \Pi \quad \forall i \in \{123\}$$

or, $\frac{\Pi}{2} < \alpha$ est incompatible avec α $< \frac{\Pi}{2}$ que nous avons posé par hypothèse. On aboutit ainsi au système d'inéquations (3).

$$\frac{\Pi}{6} \leq \theta < \frac{\Pi}{2}$$

$$(\alpha) \quad 0 \leq \alpha_{i} \leq \frac{\Pi}{2}$$

$$(\beta) \quad 0 < \alpha_{i} \leq \theta \quad \forall i \in \{1 : 2 : 3\} \qquad \theta = \arcsin \frac{R'}{R}$$

$$(\gamma) \quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i} = \Pi$$

$$i = 1$$
Système (3)

Tableau 3

Si les inéquations de (3) sont compatibles, les inéquations de (2) le seront aussi.

Résolvons (3):

Les inéquations (α), (β) sont compatibles.

En effet, dans le cas (β)

si
$$\forall$$
 i $0 < \alpha_{\tilde{i}} \leq \theta$, comme $\frac{\overline{\Pi}}{6} \leq \theta \leq \frac{\overline{\Pi}}{2}$, alors $0 < \alpha_{\tilde{i}} \leq \frac{\overline{\Pi}}{2}$,

Trois cas sont possibles:

$$\begin{cases} 0 < \alpha_{1} \leq \theta \\ 0 < \alpha_{2} \leq \theta \rightarrow 0 < \alpha_{1} + \alpha_{1} + \alpha_{2} \leq 3\theta \rightarrow \Pi \leq 3\theta \rightarrow \Pi \leq 3\theta \rightarrow \Pi \leq 3\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \alpha_{3} \leq \theta \\ 0 < \alpha_{3} \leq \theta \end{cases}$$

Cherchons maintenant le domaine de compatibilité des inéquations de (β); remplaçons pour commencer α par Π - α - α ; on obtient :

$$\begin{cases}
0 < \alpha_{1} \leq \theta \\
0 < \alpha_{2} \leq \theta \\
0 < \Pi - \alpha_{1} - \alpha_{2} \leq \theta
\end{cases} (\beta) \leftrightarrow (\beta)$$

En considérant la somme des deux dernières inéquations nous aurons :

$$0 < \alpha_{1} \leq \Theta$$

$$0 < \alpha_{2} \leq \Theta \qquad (\beta)_{2} \iff (\beta)_{1} \iff (\beta)$$

$$0 < \Pi - \alpha_{1} - \alpha_{2} \leq \Theta$$

$$0 < \Pi - \alpha_{1} \leq 2 \Theta$$

Cherchons le domaine de compatibilité de la première et quatrième inéquations; puis celui de la deuxième et de la troisième :

Nous avons ainsi la solution du système (3) : domaine de compatibilité

$$\frac{\Pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\Pi}{2} \iff \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin \theta = \frac{R'}{R} < 1$$

$$\Pi - 2\theta \leq \alpha_{1} \leq \theta \; ; \quad \Pi - \alpha_{1} - \theta \leq \alpha_{2} \leq \theta \qquad \alpha_{3} = \Pi - \alpha_{1} - \alpha_{2}$$
Système (4)

Tableau 4

3. Construction géométrique de la solution au problème de la centralité posé par Walter Christaller

3.1. Solution avec trois cercles. Dans le problème posé par Walter Christaller (R = 21 km et R' = 20 km), la solution géométrique à la distribution de la MC dans la couronne K à partir d'un nombre minimal de LC autre que le LC initial, est possible avec trois $\frac{LC}{21-20}$, à condition de les localiser dans la couronne K'.

En effet:

- (1) il n'y a pas de solution si les nouveaux LC_{20} sont situés dans la couronne K (points 1.2.1. et 1.2.2.),
- (2) il n'y a pas non plus de solution si le nombre minimal de LC situés dans K' est inférieur à trois (points 2.1. et 2.2.).

Les opérations de construction géométrique à effectuer sont alors les suivantes :

(1) calculer le rapport $\frac{R'}{R}$: si la valeur de ce rapport est située à l'intérieur de l'intervalle $[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1]$,

alors la construction est possible;

- (2) chercher θ , tel que θ = arc sin $\frac{R'}{R}$; choisir α \in [Π 2 θ ; θ] et choisir α \in [Π α θ ; θ]; déduire de α , α la valeur de α = Π α α ; construire les angles 2 α , 2 α , 2 α ;
- construire les angles 2 α , 2 α , 2 α ; (3) les centres des cercles C_1 , C_2 , C_3 sont situés sur les médiatrices des arcs A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 ;
- (4) les rayons ${\bf r}_1$, ${\bf r}_2$, ${\bf r}_3$ sont alors choisis à l'aide des inéquations :

R sin
$$\alpha_i \leq r_i \leq R'$$
 $\forall i \{1 \ 2 \ 3 \}$

Par exemple, sur la figure 15:

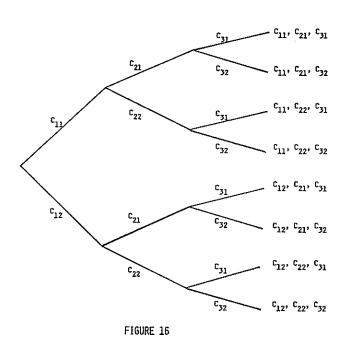
$$\sin \alpha_1 = \frac{\overline{A_3 M_1}}{R} \rightarrow \overline{A_3 M_1} = R \sin \alpha_1$$

d'où l'on déduit que la valeur r est comprise entre les bornes suivantes :

$$\frac{\overline{A_3 A_2}}{2} \leq r_1 \leq R^r$$

L'on calcule ensuite de la même manière les bornes de ${\bf r}_2$ et ${\bf r}_3$.

Les centres C se situent sur trois segments C 11 C 21 C 22 C 22 C 31 C 32 (figure 17.1.). Dans le cas le plus général, dans un premier temps, il y a d'abord huit manières de choisir les trois centres de cercles permettant de couvrir (en triplet) la couronne K.



Les huits solutions sont dessinées sur les figures 17.2. à 17.10. Chaque construction montre que l'on peut couvrir la couronne K avec trois cercles inégaux dont les centres ne sont pas nécessairement équidistant. Puis, dans un deuxième temps, l'on peut faire tourner les segments C_{11} C_{12} , C_{21} C_{22} , C_{22}

 C_{31} C_{32} autour du centre C (figure 17.3.). Les centres C parcourent alors des cercles complets dans la couronne K. Dans un troisième temps enfin, les solutions limites $\frac{R'}{R}=1$ et $\frac{R'}{R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ montrent que toute la couronne K' peut être utilisée pour construire les trois cercles destinés à couvrir la couronne K. Examinons le cas $\frac{R'}{R}=1$. Il est immédiat que R=R' et que la couronne K a une largeur minimale nulle : R'-R=0. Une seule MC est distribuée par des LC qui ont tous le même "rang". D'autre part, si R=R', alors sin $\theta=\frac{R'}{R}=1$ et $\theta=\arctan$ arc sin (1). C'est-à-dire que $\theta=\frac{II}{2}$. Donc, en vertu du système (4) d'inéquations, l'on peut choisir $\alpha_1=\alpha_2=\frac{II}{3}$. Par conséquent, par construction les LC nouveaux peuvent être répartis sur les sommets d'un triangle équilatéral autour du LC initial. C'est le premier cas particulier de Walter Christaller.

La duplication du triangle équilatéral initial permet ensuite de construire des hexagones réguliers. En effet, pour construire des hexagones réguliers à partir du premier triangle équilatéral en suivant "l'algorithme de Walter Christaller", la séquence des opérations est la suivante :

- (1) dessiner un premier triangle équilatéral autour du LC initial,
- (2) placer un LC sur chacun des sommets du premier triangle équilatéral,
- (3) prendre comme nouveau LC le premier sommet (à droite) du premier triangle équilatéral,
- (4) dessiner un deuxième triangle équilatéral autour du LC choisi à l'opération (3),
- (5) traiter successivement les deux autres LC des sommets du premier triangle équilatéral,
- (6) recommencer la séquence 1 à 5 avec les sommets du deuxième triangle équilatéral, etc.

A la quatorzième opération, un premier hexagone apparaît. Le nombre total de LC situés au "centre" d'un triangle équilatéral dont les sommets sont occupés par d'autres LC est de 14. Mais le nombre total de triangles équilatéraux formés par la construction est de 15. Or, comme le premier triangle équilatéral mobilise 1 LC de plus (le LC initial), le nombre de triangles dont le centre est inoccupé est de 2. Autrement dit, dans le premier cas limite, l'algorithme de Walter Christaller utilisant le triangle équilatéral, permet de fabriquer un espace fini et discontinu.

Examinons maintenant le cas:

$$\frac{R'}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{II}{3}$$

En remplaçant θ par $\frac{\Pi}{3}$ dans les inéquations du système (4) on tire :

$$\Pi - \frac{2\Pi}{3} \leq \alpha_1 \leq \frac{\Pi}{3}$$
 $\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\Pi}{3}$
 $2 \alpha_1 = \frac{2\Pi}{3}$

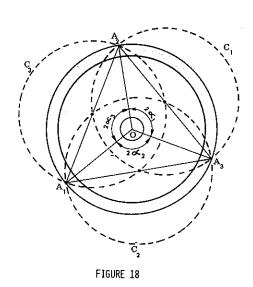
$$\Pi - \frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{3} \le \alpha_2 \le \frac{\Pi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_2 = \frac{\Pi}{3} \qquad \qquad 2 \quad \alpha_2 = \frac{2\Pi}{3}$$

$$\alpha_3 = \Pi - \alpha_1 - \alpha_2$$
 \Rightarrow $\alpha_3 = \frac{\Pi}{3}$ $2 \alpha_3 = \frac{2\Pi}{3}$

puisque
$$\frac{R'}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow R' = R \frac{\sqrt{3}}{2} = R \sin \alpha_1 = R \sin \alpha_2 = R \sin \alpha_3$$

Les inéquations (B) du système (1) prennent la forme

donc à une situation de triangle équilatéral. C'est le deuxième cas limite de Walter Christaller. Cette solution limite qui utilise le triangle équilatéral n'est pas en contradiction avec celle également fondée sur l'utilisation de la même figure mais dont la fausseté a été démontrée au point 1.2.1. Dans ce dernier cas, en effet, les centres des trois cercles sont situés sur le cercle extérieur de la couronne (extérieure) K (figure 4); dans l'autre cas, les centres des trois cercles sont situés dans la couronne (intérieure) K' (figure 18).



3.2. Généralisation avec plus de trois cercles. Dans la mesure où l'on admet que <u>la couronne K peut être couverte par des cercles inégaux dont les centres sont localisés dans la couronne K', l'on peut maintenant s'interroger sur ce qui se passe géométriquement lorsque la largeur de la couronne K augmente, ou ce qui revient au même, lorsque la largeur de la couronne K' diminue. Mathématiquement, étant donné que, par formulation du problème de la distribution de la MC (préliminaires du point 2) R' \leq R, le cas $\frac{R'}{R}$ > 1 est exclu (condition III). Pratiquement cependant, rien ne s'oppose à ce que l'intervalle de portée entre deux MC varie et devienne très grand. L'on peut donc essayer de voir ce qui se passe si $\frac{R'}{R}$ < $\frac{\sqrt{3}}{2}$.</u>

Nous avons vu précédemment que si $\frac{R'}{R} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ on ne peut pas couvrir K avec trois cercles de rayon $r_{\hat{i}} \leq R'$. Mais peut-on résoudre le problème avec des cercles dont les centres sont :

- (1) dans la couronne K'
- (2) aux sommets de figures ayant plus de trois côtés ?

Soit λ = f $(\frac{R^t}{R})$ le nombre minimum de cercles de rayon inférieur ou égal à R', centrés à l'intérieur de la couronne K' et couvrant totalement la couronne K.

$$\mu = g \left(\frac{R'}{R}\right)$$
: largeur maximale de : K = R - R' min

$$\mu^{\, \text{l}} = g^{\, \text{l}} \, (\frac{R^{\, \text{l}}}{R})$$
 : largeur minimale de : K' = 2 R' $_{min}$ - R

Donnons-nous encore les sinus de certains angles qui interviennent naturellement dans ce travail

$$\sin \frac{\Pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.5000$$

$$\sin \frac{\Pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2 \sqrt{5}} \stackrel{\sim}{=} 0.5878$$

$$\sin \frac{\Pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \stackrel{\sim}{=} 0.7071$$

$$\sin \frac{\Pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \stackrel{\sim}{=} 0.8660$$

Les résultats sont résumés dans le tableau 5.

$\sin\frac{\overline{II}}{6} \le \frac{R'}{6} < \sin\frac{\overline{II}}{5}$	$\mu' = R (2 \sin \frac{\Pi}{6} - 1) = 0$	$\mu = R (1 - \sin \frac{\Pi}{6}) \stackrel{?}{=} 0,5 R$	λ = 6
$\sin \frac{\overline{\Pi}}{5} \le \frac{R'}{R} < \sin \frac{\overline{\Pi}}{4}$	$\mu' = R (2 \sin \frac{\Pi}{5} - 1) = 0.18 R$	$\mu = R (1 - \sin \frac{\Pi}{5}) = 0.41 R$	λ = 5
$\sin \frac{\Pi}{4} \le \frac{R'}{R} < \sin \frac{\Pi}{3}$	$\mu' = R (2 \sin \frac{\Pi}{4} - 1) \stackrel{\sim}{=} 0.41 R$	$\mu = R (1 - \sin \frac{\Pi}{4}) \stackrel{?}{=} 0.29 R$	λ = 4
$\sin \frac{\Pi}{3} \le \frac{R'}{R} < \sin \frac{\Pi}{2}$	$\mu' = R (2 \sin \frac{\Pi}{3} - 1) \stackrel{\sim}{=} 0.73 R$	$\mu = R (1 - \sin \frac{\Pi}{3}) \stackrel{?}{=} 0.13 R$	λ = 3

Tableau 5

L'on remarque dans le tableau 5 un <u>troisième cas particulier de Walter Christaller</u> avec $u' = 0 \rightarrow 2 R' - R = K' = 0$

La solution géométrique est alors effectivement la construction d'un hexagone régulier.

Par conséquent, les solutions géométriques préconisées par Walter Christaller : construire un triangle équilatéral ou un hexagone régulier, ne sont valables que dans les conditions suivantes :

- (1) toutes les MC ont la même "portée": R = R' (<u>cas particulier</u>); <u>la couronne K</u>
 <u>n'existe pas</u>; les LC peuvent être disposés autour du LC initial aux sommets
 d'un <u>triangle</u> équilatéral;
- (2) le rapport entre la "portée" des MC est exactement $\frac{R'}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (cas limite) la couronne K existe et elle a une largeur maximale; les LC doivent être disposés autour du LC initial aux sommets d'un triangle équilatéral (figure 18);
- (3) une MC a une "portée" exactement égale à la moitié de la "portée" d'une autre MC : $R' = \frac{R}{2}$ (cas particulier); <u>la couronne K' n'existe pas</u>; les LC doivent être disposés autour du LC initial aux sommets d'un <u>hexagone régulier</u>;
- dans le cas général, les MC ont des portées différentes : $\frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{R'}{R} < 1$; la couronne K' existe; les LC peuvent être disposés autour du LC initial aux sommets d'un triangle équilatéral (cas particulier) situé dans la couronne K'.

Les solutions géométriques proposées par Walter Christaller doivent être considérées, soit comme des cas particuliers, soit comme un cas limite, utilisables si et seulement si les conditions précédentes sont remplies.

4. La centralité : un cadavre exquis

Tel que Walter Christaller l'a posé en 1933, le problème de la centralité est pertinent et géométriquement soluble si on se soustrait à l'ambiguïté des chiffres ronds ou à la symbolique des nombres premiers et à la fascination exercée par certaines formes géométriques comme le triangle équilatéral ou l'hexagone régulier. Dans ces conditions, contrairement à ce que pensait W. Christaller, le problème de la centralité a non pas une mais une infinité de solutions géométriques. Résultat apparemment paradoxal dû au fait que les caractéristiques de l'espace

de la centralité sont très proches si ce n'est identiques à celles de l'espace géographique. Mais aussi résultat conforme aux observations empiriques. Car si l'on joint entre eux des lieux habités de même importance par des lignes droites qui ne se coupent pas, on obtient un réseau de triangles quelconques. On peut ensuite construire sur ce premier réseau un deuxième réseau organisé autour des lieux habités initiaux. Ce nouveau réseau est "central" au sens où nous l'avons défini au début du point 2, à partir du problème posé par Walter Christaller. Les figures obtenues ne sont pas réqulières sauf exception rarissime dont la probabilité est, par exemple, pour le triangle équilatéral, pratiquement nulle. Résultat qui est loin d'être trivial car il permet de reposer de manière élargie et opératoire le problème de la centralité dont l'existence est évidente pour tous les géographes même si sa solution ne l'est pas. L'observation la plus élémentaire suggère en effet qu'il existe une organisation spatiale des lieux de peuplement et des villes, bien que celle-ci n'ait pas la régularité géométrique que W. Christaller lui prêtait. Loin d'invalider les intuitions de W. Christaller, les démonstrations précédentes leur donnent la place qui est la leur : celle d'un cadavre exquis fécondant la réflexion géographique.

4.1. La distance centrale

4.1.1. Si W. Christaller s'est enfermé dans la représentation théorique des réseaux de lieux centraux à l'aide du triangle équilatéral et de l'hexagone réqulier, il a évité par contre le piège de la réduction empirique de la distance entre lieux centraux à la distance euclidienne. En d'autres termes, la distance définie par W. Christaller a toutes les propriétés de la distance euclidienne, mais elle possède en plus une caractéristique qui en fait une distance centrale. Cependant, comme nous avons restreint la reprise du texte de Walter Christaller à la seule étude des rapports centre -> périphérie, il est clair que notre généralisation n'épuise pas l'idée de la centralité. D'autant que cette dernière est conforme à celle que Walter Christaller se faisait de la centralité urbaine en Allemagne du sud dans les années 30. La définition du lieu central ne peut donc être que partielle et "a priori" en attendant d'être axiomatisée. Ceci étant, si l'on généralise l'intuition initiale de W. Christaller, par définition, la distance centrale minimale dépend de son extension périphérique maximale possible. Ainsi W. Christaller liait la "portée" minimale de la MC_k à la différence entre les portées maximales de la MC_k et de la MC_{k+1} . Pratiquement comme W. Christaller raisonnait en

kilomètres, la portée minimale de la MC₂₀ était de 1 km puisque la MC de portée maximale immédiatement supérieure était la MC_{21} (21 - 20 = 1). Soit maintenant, R_1 la portée de la MC_1 et R_{p+1} la portée de la MC_{p+1} : la portée minimale de la MC_1 sera p + 1 - 1 = p. Mais comme p peut varier de 1 à n - 1 (préliminaires du point 2), il existe n - 1 séries de distances minimales entre marchandises centrales différentes. Ou encore, il existe n - 1 séries de distances centrales possibles. Propriété théorique vérifiée par les études empiriques de "portée" des marchandises centrales ou de services centraux aussi bien en Europe qu'aux Etats-Unis. Il existe ainsi des distances centrales de "portées" échelonnées pour les produits alimentaires, les produits de luxe, les loisirs, les services sanitaires, les écoles, les églises, les prisons, etc. Ces distances centrales varient d'un pays et d'une époque à une autre. Par conséquent la centralité n'est pas, en première approche, un phénomène "global" mesurable à l'aide d'une seule donnée comme la population. Elle est multiple et attachée à chaque donnée, comme le pensait d'ailleurs W. Christaller quand il raisonnait théoriquement. Enfin, pour chaque phénomène central il n'existe pas une mais une série de "portées" ou encore des distances qui sont liées entre elles. Par exemple, l'observation immédiate vérifie que la distance centrale d'une chapelle est inférieure à celle d'une église et "a fortiori" à celle d'une cathédrale de pélerinage. Et ceci, même si ces "lieux centraux" sont extrêmement proches ou pratiquement confondus.

4.1.2. L'analyse géométrique de la généralisation de l'idée primitive de W. Christaller permet également de choisir un critère pour distinguer spatialement les lieux centraux entre eux. Soit deux LC dont l'intervalle de distance centrale est égal à p. Le rayon de portée minimale sera Rp. Chaque LC comprend, de l'intérieur vers l'extérieur :

- (1) un cercle de distance minimale égale à l'intervalle et de rayon Rp = R R'
- (2) une couronne K' de rayon R' et de largeur R' (R R') = 2 R' R
- (3) une couronne K de rayon R dont la largeur est aussi égale à R R' = Rp.

Si la couronne K' est de largeur nulle,

$$R' - (R - R') = 0 \rightarrow 2 R' - R = 0 \rightarrow R' = \frac{R'}{2} \text{ et } \frac{R'}{R} = \frac{1}{2},$$
valeur limite du tableau 2 : $\frac{1}{2} \le \frac{R'}{R} < 1$.

Si l'on pose : d = la distance entre les centres de rayon R', les différents cas sont alors les suivants :

1er cas:

$$R' = \frac{1}{2}$$

d > R' + R'

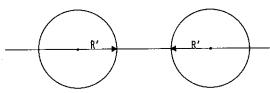


FIGURE 19.1.

Les cercles de rayon minimal sont extérieurs l'un à l'autre, les deux LC sont distincts.

2e cas:

$$R^{\dagger} = \frac{1}{2}$$

d = R' + R'

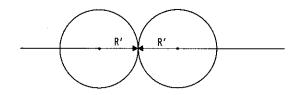


FIGURE 19.2.

Les cercles de rayon minimal sont tangents : les deux LC sont distincts.

3e cas:

$$R^{\dagger} = \frac{1}{2}$$

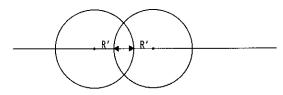


FIGURE 19.3.

Les cercles de rayon minimal sont sécants : les deux LC sont distincts.

4e cas:

$$R' = \frac{1}{2}$$

d < R'

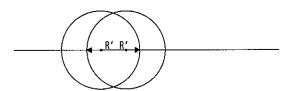


FIGURE 19.4.

Les cercles de rayon minimal sont sécants et leurs centres sont situés dans l'intersection : les deux LC sont confondus (occupent le même lieu). Résultats à nouveau confirmés par l'observation élémentaire.

- (1) Si deux magasins ont le même intervalle de distance centrale et par conséquent le même rayon minimal, cela ne les empêche pas de s'installer à l'intérieur de cette distance minimale. C'est le phénomène de "galerie marchande", "souk", "bazar", "fondouk", etc.
- (2) La distance minimale est alors mesurée par l'épaisseur du mur qui sépare deux magasins. La seule impossibilité est qu'un magasin s'installe à l'intérieur d'un magasin identique (4e cas).

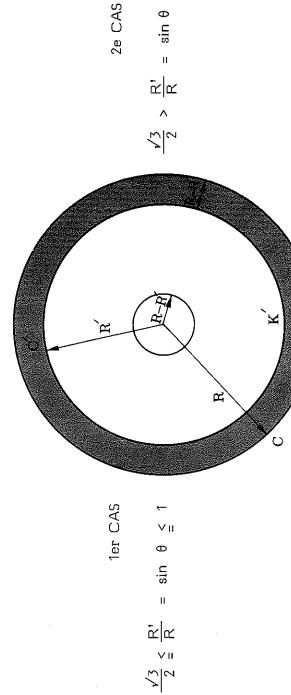
4.2. L'espace de la centralité et l'espace géographique. Bien qu'il puisse être représenté à l'aide de figures géométriques, l'espace de la centralité n'a pas de propriétés d'isomorphie et d'isotropie. Tout d'abord, nous avons montré au point 2 que, à condition d'admettre la formulation initiale de Walter Christaller. il est possible de desservir une couronne périphérique non fournie en marchandise par un lieu central en disposant trois lieux centraux en deçà de la couronne non desservie (et non pas dans la couronne comme le pensait Walter Christaller). D'autre part, nous avons vu que sous certaines conditions de largeur de cette couronne, l'on peut également disposer 4, 5 ou 6 lieux centraux au sommet d'une figure géométrique quelconque. Par conséquent, si l'on entend par isomorphie la reproduction d'une forme régulière (pour W. Christaller : l'hexagone réqulier), notre démonstration montre qu'un réseau de lieux centraux peut être construit sans respecter cette propriété. Il est donc maintenant possible de s'affranchir de l'image de figures géométriques régulières (hexagone, carré, triangle équilatéral) ou semi-régulières (parallélogramme, losange etc.) pour étudier la centralité. Une contrainte subsiste cependant comme "garde-fou" : l'obligation de ne pas dépasser six côtés.

De plus, à partir du moment où des lieux existent, il est évident qu'il va se créer entre eux des cheminements privilégiés en fonction du relief et de la technique de transport. Dès lors l'espace de la centralité n'est pas isotrope puisque la surface sur laquelle on se déplace pour aller d'un LC à un autre n'a pas les mêmes propriétés dans toutes les directions. D'autre part, admettons qu'un lieu central puisse distribuer une marchandise centrale en deçà de la portée maximale de cette marchandise. Cette condition est à nouveau conforme à l'observation élémentaire : le pain est distribué par des grandes surfaces ou par des boulangeries. Or il est immédiat que la portée de la marchandise pain n'est pas la même dans les deux cas et que celle du boulanger est en deçà de celle de la grande surface. Comme nous l'avons vu au point 4.1.1. il n'y a donc pas une distance centrale discrète par marchandise ou service, mais une distance

continue ayant éventuellement une valeur modale entre des bornes inférieures et supérieures.

Ainsi, la configuration de la surface terrestre et la distribution inégale de la population permettent de comprendre pourquoi les LC ne sont pas disposés à intervalles réguliers. Dans une vallée des Alpes par exemple, actuellement la population permanente est concentrée en majorité linéairement dans la partie la plus basse et la population touristique saisonnière dispersée un peu partout depuis le fond jusqu'à mi-pente. Il est donc normal que dans ce cas le réseau de lieux centraux soit surtout linéaire alors qu'en plaine il a tendance à devenir hexagonal, pentagonal ou quadrangulaire. Enfin à toutes ces propriétés qui font de l'espace de la centralité un espace très proche de l'espace géographique, devrait s'ajouter une propriété de non-réciprocité des distances lorsqu'on passera de l'étude des rapports centre → périphérie à celle des rapports périphérie → centre. En effet, il est d'expérience qu'on ne se déplace pas avec la même facilité du sommet d'une colline à sa base que de sa base à son sommet. Or, comme beaucoup de lieux centraux étaient construits au Moyen-Age en haut d'une colline, cette utilisation de la surface terrestre a dû avoir des conséquences sur la constitution du réseau urbain. Un des buts des grands travaux dans les villes modernes est d'ailleurs de porter remède à la non-réciprocité des distances.

> 4e version Novembre 1983



Solution générale: trois, quatre, cinq ou six lieux centraux au sommet d'une figure quelconque à trois, quatre, cinq ou six sommets (dont l'hexagone régulier: cas particulier).

Solution générale : trois lieux centraux (dans K') au sommet d'un triangle quel-

conque (dont le triangle équilatéral :

cas particulier).

 $\frac{\text{cas limite}}{\text{R}} : \frac{\text{R'}}{\text{R}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\text{cas limite}}{\text{rois lieux centraux}} : \frac{\text{R'}}{\text{R}} = 1$

au sommet d'un trian- au sommet d'un triangle gle équilatéral équilatéral

 $\frac{\text{cas limite}}{\text{six lieux centraux au}} = \frac{R}{2}$

sommet d'un hexagone régulier

Tableau 6

La centralité d'après les auteurs anglo-saxons (Dacey, Haggett, Berry, Beavon)	La centralité d'après le groupe de Lausanne			
Espace vectoriel (indifférencié) structuré par un treillis de points (isotrope).	Espace géographique (différencié) à la surface de la terre. Définition géographique du lieu central à partir de la distance.			
Réseau géométrique régulier (iso- morphe : triangle équilatéral ou hexagone).	Réseau géométrique de figures quel- conques à 3, 4, 5 ou 6 côtés.			
Hiérarchisation "a priori".	Hiérarchisation historique (ou géné- tique)			
Définition statistique du lieu central et de la distance entre lieux centraux.	Vérification statistique "a poste- riori".			
Double réalité : le modèle "idéal" et sa réalisation pratique comme	Une seule réalité géographique ma- térielle.			

toriene.

Tableau 7

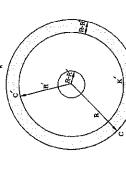
dégradation de l'idéalité.

LE PROBLÈME DE LA CENTRALITÉ

DEFINITIONS

- LC : UN LIEU CENTRAL
- MC : UNE MARCHANDISE CENTRALE DISTRIBUEE DEPUIS LE LC
 - $R : DISTANCE MAXINUM DE DISTRIBUTION DE LA <math>\mbox{MC}_{R}$
- $R^\prime: DISTANCE MAXINUM DE DISTRIBUTION DE LA MC_R^\prime$

 - R : rayon du cercle de centre i G_{R}
- R' : RAYON DU CERCLE DE CENTRE LC_R'



COMMENT COUVRER ENTIEREMENT LA COURONNE K = R - R' AVEC UN NOMBRE MINIMUM DE CERCLES DE RAYON ≤ R'? COMMENT DISTRIBUER LA NGRADU DELA DE R'? CHAQUE CENTRE DE CERCLE EST UN NOUVEAU LC

FIGURE 17.0.1

SOLUTION GEOMETRIQUE

- 1) PAS DE SOLUTION AVEC UN.DEUX,TROIS CERCIES LOCALISES
 - DANS LA COURONNE K
- 2) PAS DE SOLUTION AVEC UN OU DEUX CERCLES LOCALISES DANS LA COURONNE K'
- 3) UNE INFINITE DE SOLUTIONS AVEC TROIS CERCLES LOCALISES DANS LA COURONNE K'

CONDITIONS DE LA SOLUTION GEOMETRIQUE

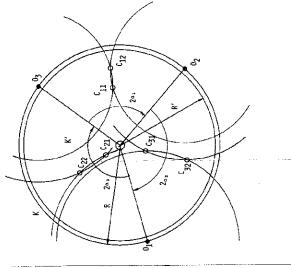
			DANS	_			
۰,	ψ VI	N	ALLER	1933			
ة ا	vt O	1 5	CHR1S1	₽			
1 - 2 0 ≤ 01 ≤ 0	II - a, - 0 ≤ a2 ≤ 9	01 - II - 01- 02	APPLICATION : LE PROBLEME DE WALTER CHRISTALLER DANS	" DIE ZENTRALER ORTE IN SUDDEUTSCHLAND " (1933)		_	9
-	Б	8	띩	SUDDEC	6 - 71,8	20, = 93	2 u2 - 125
	_		OBLEM	E IX	, ©	2 9	5
-1		r ∝	LE PR	¥ ORT			
0 - orc sin R		•	~	R			
٠ ت	5		1	Z.	5	Ş	R - R' = 1 Km
ă	v	•	2	띰	2	20	04
-	п	N	AP P		R = 21 Km	R'= 20 Km) #
	~ <u>:</u>	_			_		

SUR LES FIGURES 17.1. A 17.9. CHAQUE CENTRE C EST UN LIEU CENTRAL LC

2 as = 142

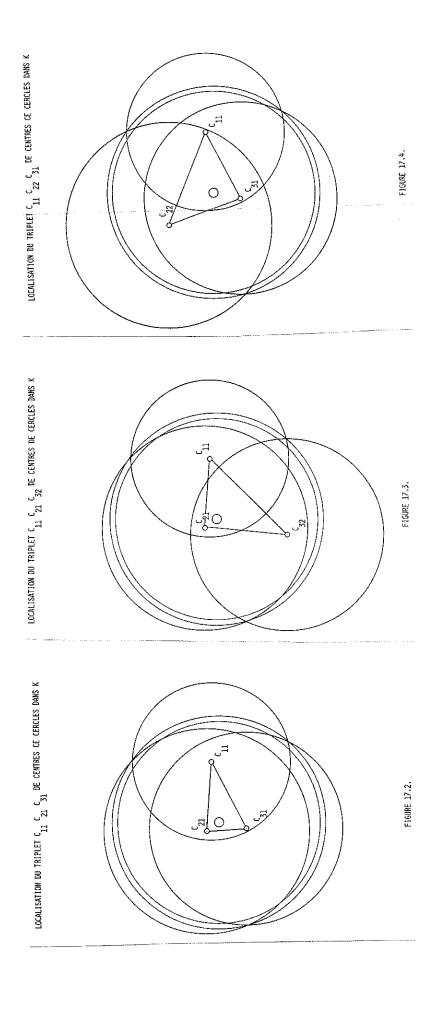
R' - - 0,95238 B

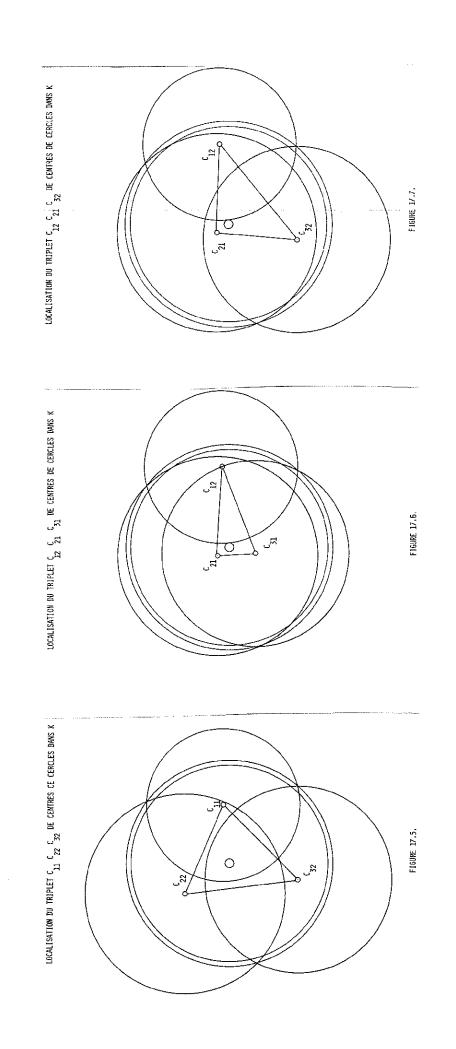
LOCALISATION DES HUIT TRIPLETS DE CENTRES DE CERCLES COUVRANT K



F16URE 17.1.

FIGURE 17.0.2.





copyright Mélétis MICHALAKIS 1986-2006

